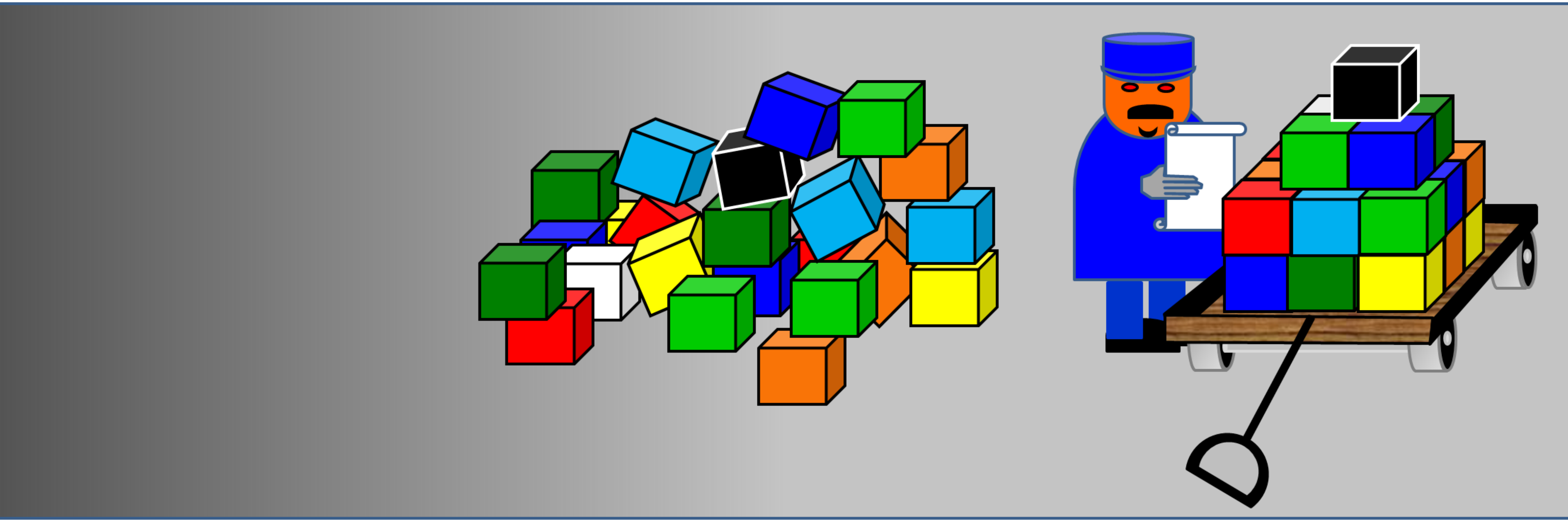
Το θεώρημα των τεσσάρων τετραγώνων του Lagrange: Κάθε μη αρνητικός ακέραιος n, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων:

$$n = w^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

όπου οι w, x, y και z είναι μη αρνητικοί ακέραιοι.



Ένας αχθοφόρος επιμένει να στοιβάζει τα κουτιά στο καροτσάκι του σε σχήμα πυραμίδας με τετράγωνες στρώσεις κουτιών. Το θεώρημα του Lagrange λέει ότι ο αχθοφόρος μπορεί να το επιτύχει με το πολύ τέσσερις στρώσεις, ανεξαρτήτως του αριθμού των κουτιών που έχει. Η πιο πάνω εικόνα απεικονίζει το $23 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$. Όμως τώρα ο αχθοφόρος διαπίστωσε ότι ξέχασε να παραλάβει ακόμη ένα κουτί! Με ποιον τρόπο μπορεί να τοποθετήσει τώρα τα 24 κουτιά στο καροτσάκι του;

Το αποτέλεσμα ήταν γνωστό στον Διόφαντο τον Αλεξανδρέα, και διατυπώθηκε για πρώτη φορά ρητώς από τον Bachet, ο οποίος και μετέφρασε τα «Αριθμητικά» του Διόφαντου στα Λατινικά, το 1621. Χρειάστηκε να περάσουν άλλα εκατόν πενήντα χρόνια, έως ότου δοθεί μια πλήρης απόδειξη από τον Lagrange, το 1770. Πιο γενικά, το **Πρόβλημα του Waring** (το οποίο απαντήθηκε καταφατικά αλλά όχι κατασκευαστικά από τον Hilbert το 1909) ρωτάει αν κάθε θετικός ακέραιος n μπορεί να γραφεί ως άθροισμα σταθερού αριθμού k-οστών δυνάμεων. Π.χ. κάθε μη αρνητικός ακέραιος μπορεί να γραφεί ως άθροισμα 9 κύβων, λ.χ. έχουμε $23 = 2^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$. Το 23 είναι ένας από τους μόνο δύο αριθμούς οι οποίοι χρειάζονται 9 κύβους (ο άλλος είναι ο 239). Είναι άγνωστο ακόμη αν μπορούμε να γράψουμε κάθε αρκετά μεγάλο ακέραιο χρησιμοποιώντας μόνο 6 κύβους. (Το 8042 είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο γνωρίζουμε ότι χρειάζονται 7 κύβοι.)