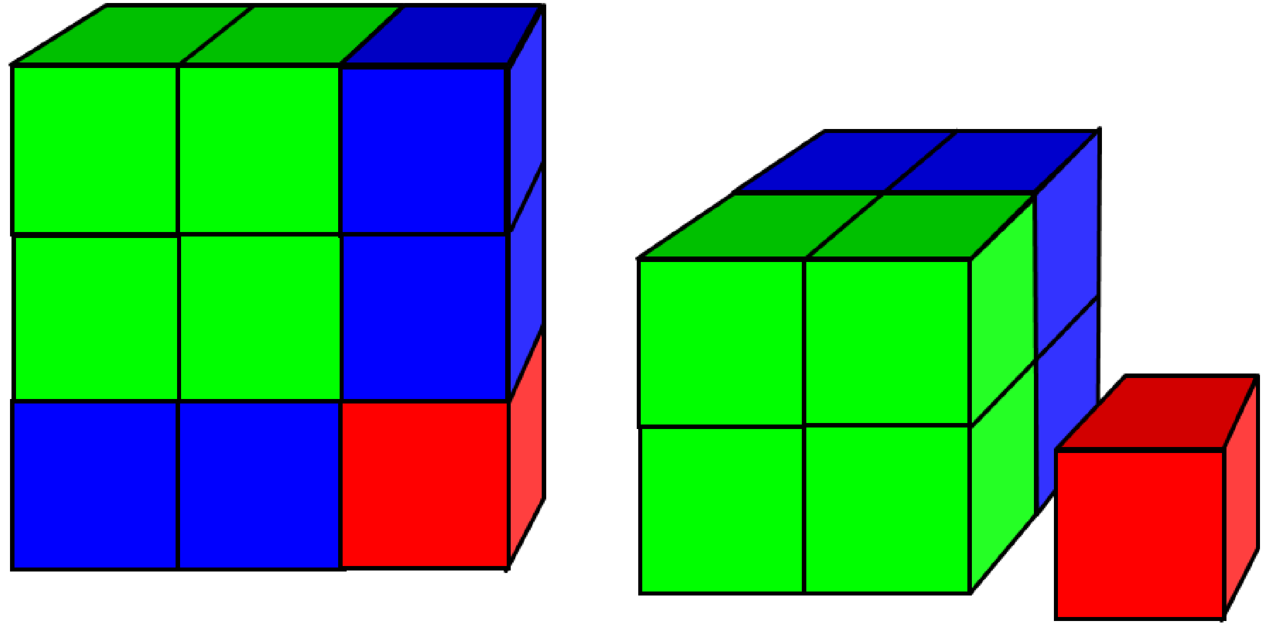
THEOREM OF THE DAY

Conjetura de Catalan (Teorema de Mihăilescu) *Sean x, y, p, q enteros positivos tales que $x^p - y^q = 1$. Se sigue que $x = q = 3$ y $y = p = 2$.*



$3^2 \quad = \quad 2^3 \quad + \quad 1$

Casi ternas de Catalan

$x^p - y^q \leq 10$, $2 \leq x, y, p, q \leq 100$, p, q, primos

$3^3 - 5^2 = 2$

$2^7 - 5^3 = 3$

$2^3 - 2^2 = 6^2 - 2^5 = 5^3 - 11^2 = 4$

$2^5 - 3^3 = 5$

$2^5 - 5^2 = 4^2 - 3^2 = 2^7 - 11^2 = 7$

$4^2 - 2^3 = 8$

$5^2 - 4^2 = 6^2 - 3^3 = 15^2 - 6^3 = 9$

$13^3 - 3^7 = 10$

En otras palabras, 8 y 9 son las únicas potencias perfectas consecutivas no triviales. Podemos centrarnos en potencias primas ya que una solución a, digamos, $x^4 = y^{15} + 1$, daría también una solución en números primos: $(x^2)^2 = (y^3)^5 + 1$. Incluso ampliando la búsqueda a potencias perfectas cuya diferencia es algún $t \neq 1$ concreto, las soluciones parecen muy escasas: las mostradas arriba a la derecha son las únicas para $t \leq 10$ con $x, y, p, q \in \{2, \ldots, 100\}$. (La ecuación diofántica $x^p - y^q = 6$ carece de soluciones en este rango, y desconozco si existen fuera de él.) De hecho, una conjetura de los años 30 por Subbayya Sivasankaranarayana Pillai afirma que para cualquier entero positivo t, sólo hay un conjunto finito de $x, y, p, q \geq 2$ que satisfagan $x^p - y^q = t$.

Como para el último teorema de Fermat, la solución a esta conjetura de 1844 por Eugène Catalan se fraguó a lo largo de un amplio periodo de tiempo. Victor Lebesgue pronto estipuló que $q \neq 2$ (1850), pero a partir de ahí llevó más de un siglo hasta que Chao Ko, en torno a 1960, estableció el otro caso cuadrático: $p \neq 2$, excepto para $x = 3$. Esto redujo el problema a p, q primos impares, y, expresando la ecuación como $(x - 1) \times (x^p - 1)/(x - 1) = y^q$, se pudo demostrar que el máximo común divisor de los dos factores de la izquierda tenía que ser o bien 1 o bien p. El primer caso fue resuelto por J.W.S Cassels en 1960; sólo quedaba el "Caso II", MCD=p. Fue ese último formidable escollo el que Mihăilescu superó. En 2000 mostró que p y q tendrían que ser un denominado "par de Wieferich" de tal forma que $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q^2}$ y $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$; finalmente, en 2002, probó que tal solución tampoco era posible.

Enlace web: www.ams.org/bull/2004-41-01/ (haz click en el artículo de Tauno Metsänkylä).
Más información: *Catalan's Conjecture* por René Schoof, Springer-Verlag, Londres, 2008.

Creado por Robin Whitty para www.theoremoftheday.org
Traducido por Juan Carlos Gil, @ApuntesCiencia en Twitter