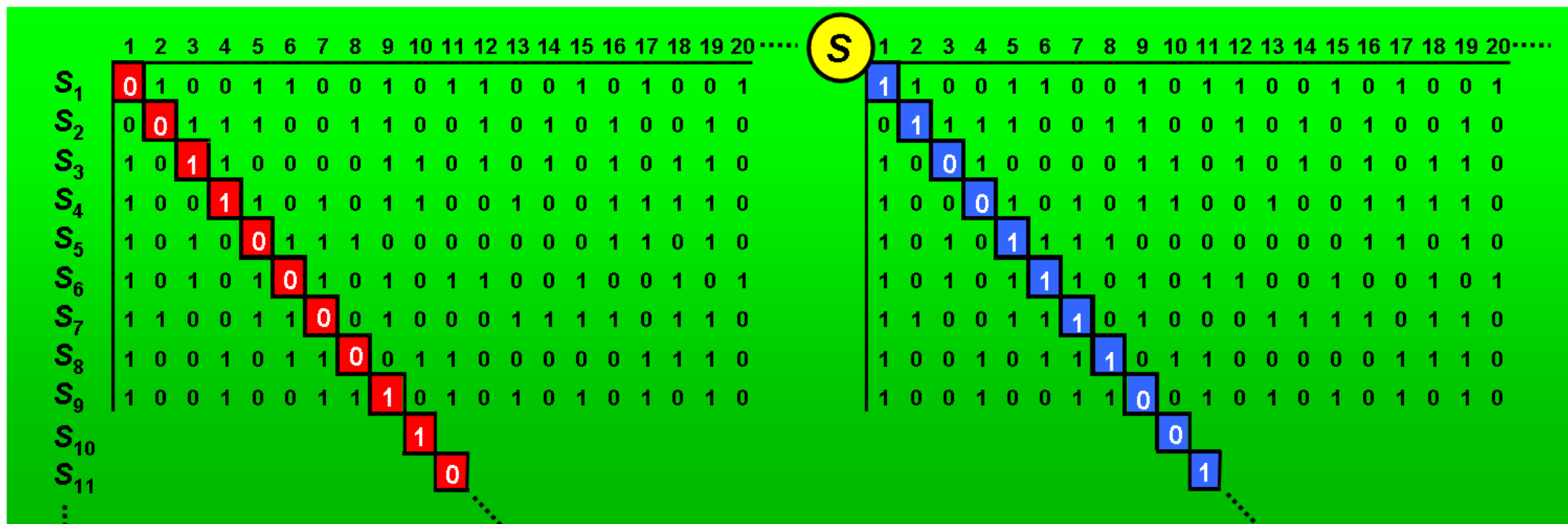




THEOREM OF THE DAY

Le Théorème de Cantor de Non-dénombrabilité *L'ensemble des suites infinies de 0 et de 1 est non-dénombrable.*



Démonstration: Supposons (pour une contradiction) que l'ensemble des suites infinies de 0 et de 1 soit dénombrable. Ca veut dire qu'on peut faire une liste exhaustive des suites: S_1, S_2, S_3, \dots . Notons $S_i(j)$ l'élément j de la suite S_i . Alors définons une nouvelle suite, S , dont l'élément i est égale à 1, si $S_i(i) = 0$, et égale à 0, si $S_i(i) = 1$. Sous forme d'un raccourci mathématique on écrit, pour $i = 1, 2, 3, \dots$, $S_i = 1 - S_i(i)$. Or, S est certainement une suite infinie de 0 et de 1, alors elle doit être membre de notre liste: elle est, disons, S_k , qui veut dire que son élément k soit $S_k(k)$. Mais celle-ci est, par définition, $1 - S_k(k) \neq S_k(k)$. Nous avons donc contredit la possibilité de construire notre liste des suites. CQFD

On voit en action ici le fameux *argument de la diagonale* de Cantor, illustré ci-dessus. La suite S générée sur la diagonale à droite se ressemble au début la suite S_7 à gauche: "110011...". Mais la comparaison échoue au 7ème élément, ce qui est inévitable par définition de S .

Le théorème établit que l'ensemble des nombres réels est *non-dénombrable*, c'est à dire, ses éléments ne peuvent être énumérés sans omission ni répétition dans une liste indexée par les entiers naturels (1, 2, 3, ...). Pour le vérifier informellement, considérons les suites infinies de 0 et de 1 comme les développements binaires des fractions (par exemple, $0.010011\dots = 0/2 + 1/4 + 0/8 + 0/16 + 1/32 + 1/64 + \dots$). Plus généralement, on conclut que l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble dénombrablement infini est non-dénombrable: considérons chaque suite infinie de 0 et de 1 comme les instructions pour construire un sous-ensemble: l'élément i de la suite indique si, oui ou non, on veut inclure (1) l'élément i ou de l'exclure (0).

1973 a été témoin à la découverte historique de Cantor qu'il existe les différents «tailles» de l'infini: l'ensemble non-dénombrable des nombres réels en contraste avec celles des nombres rationnelles et des nombres algébriques, qu'il a démontré sont tous les deux dénombrables.

Lien externe: dehornoy.users.lmno.cnrs.fr/Talks/DycShort.pdf (1.1MO).

A lire: *Aventures Mathématiques* par Miguel de Guzmán, PPUR presses polytechniques, 1990.

