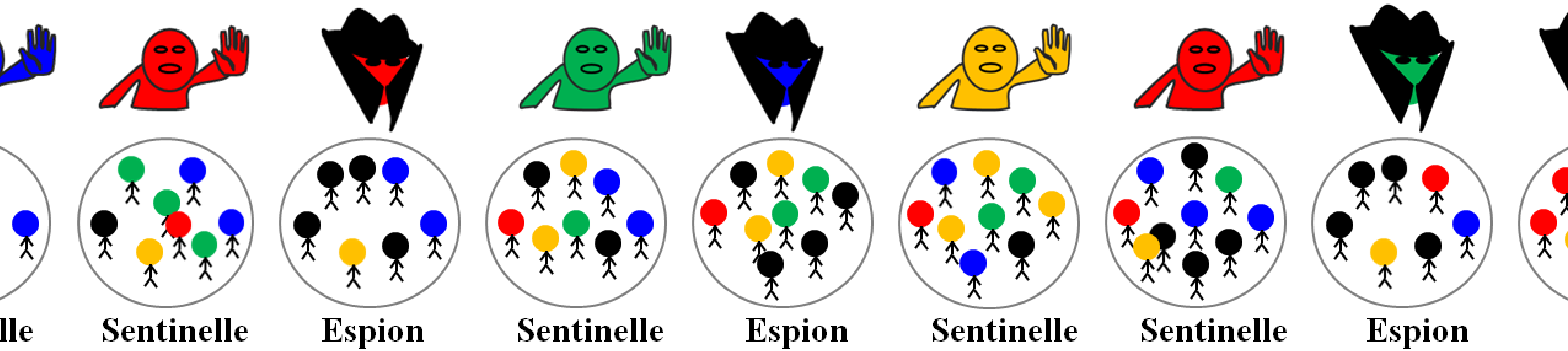
THEOREM OF THE DAY

Le Théorème de Cantor *L'ensemble puissance 2^X d'un ensemble X ne peut pas être mis en correspondance biunivoque avec X. La cardinalité de 2^X est donc strictement supérieure à celle de X.*



Démonstration: Imaginons que les membres de l'ensemble X constituent la population, possiblement infinie, d'un pays. L'ensemble puissance, 2^X, est l'ensemble de tous les sous-ensembles de X. Nous pouvons les imaginer comme étant toutes les communautés ou tous les sous-groupes constitués à partir de cette population. Supposons que nous pouvons mettre les individus de la population X en correspondance biunivoque avec ses communautés, c'est-à-dire, qu'à chaque personne est associé une communauté différente et inversement. Si une personne est associée à une communauté à laquelle elle appartient on appelle cette personne "Sentinelle", sinon on l'appelle "Espion". La communauté constituée de tous les espions est elle-même une communauté (possiblement infinie) de la population X. Est elle associée à une sentinelle ou un espion ? Aucun des deux ! En effet, un espion appartiendrait à cette communauté, ce qui ferait de lui une sentinelle ; inversement, une sentinelle n'y appartiendrait pas, ce qui en ferait un espion. Nous aboutissons à une contradiction : notre correspondance biunivoque nexiste donc pas. CQFD.

Ce théorème qui traite des différentes ″tailles″ de l'infini étend la démonstration de Cantor sur lindénombrabilité de lensemble des nombres réels. L'argument utilisé ci-dessus revient essentiellement à celui de la diagonale de Cantor : on suppose quune liste des objets existe ; on spécifie un objet particulier dans la liste ; on démontre que cet objet invalide la liste. Le résultat et donc un phénomène assez rare en mathematiques : une démonstration facile d'un théorème profond et conceptuellement difficile.

La notation Y^X est parfois utilisé pour l'ensemble de toutes les fonctions entre l'ensemble X and l'ensemble Y. Dans le cas où $Y = \{0, 1\}$ ceci est l'equivalent de choisir des sous-enembles d'X (1 pour inclus, 0 pour exclus), donc par un "abus de notation" on écrit 2^X pour l'ensemble puissance d'X. Si X est un infini dénombrable, d'est à dire ses éléments peuvent être listés, nous retrouvons le théorème de Cantor de 1874.

merci à N.P., @paljasn

Lien externe: accromath.uqam.ca/2007/02/linfini-cest-gros-comment/

A lire: *Desir D'infini: Des Chiffres, Des Univers Et Des Hommes* by Thuan Trinh Xuan, Gallimard, 2014.