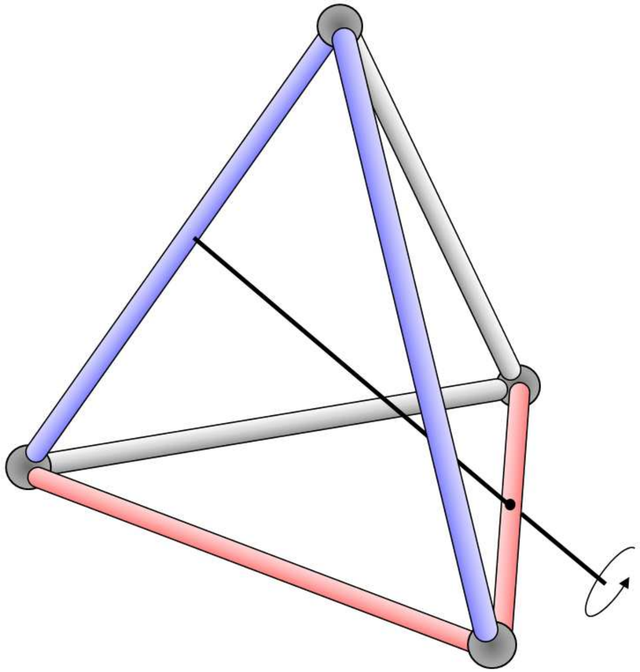
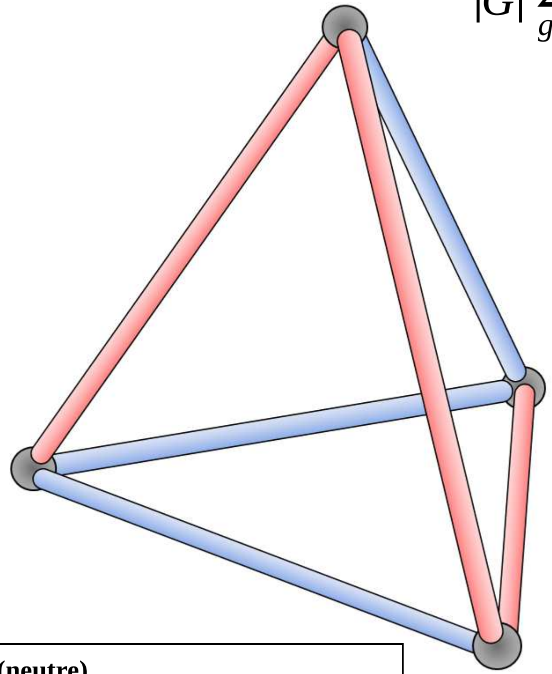
THEOREM OF THE DAY

Le Lemme de Cauchy–Frobenius *Soit G un groupe de permutations d'un ensemble fini* Ω. *Pour* $g \in G$, *notons* fix(g) *le nombre d'éléments de* Ω *qui ne sont pas déplacés par g. Alors*

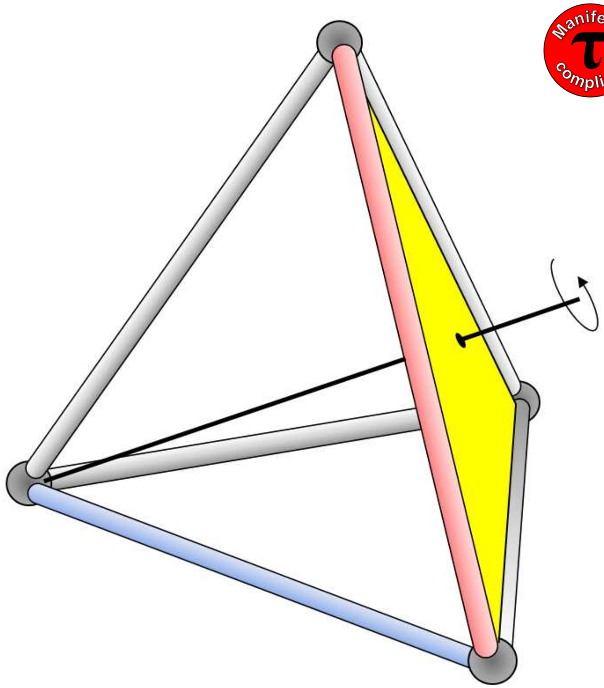
$$\textit{nombre d'orbites de } G \textit{ sur } \Omega = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathrm{fix}(g).$$



Rotation arête-arête (1/2-tour, $\tau/2$)
Nombre de symétries : 3
Arêtes fixées : 2 (toutes les 2 à colorier librement)
Arêtes déplacées : 4 (2 paires, 1 couleur libre chacune)
Colorations fixées par symétrie : 2^4



Identité (neutre)
Nombre de symétries : 1
Arêtes fixées : 6 (toutes à colorier librement)
Arêtes déplacées : 0
Colorations fixées par symétrie : 2^6



Rotation sommet-face ($\tau/3, 2\tau/3$)
Nombre de symétries : 8
Arêtes fixées : 0
Arêtes déplacées : 6 (1 libre au sommet, 1 libre à la face)
Colorations fixées par symétrie : 2^2

Illustré ci-dessus, une visualisation et application typique du lemme. Nous voulons dénombrer les colorations rouge-bleue des arêtes d'un tétraèdre régulier, en ignorant les colorations qui sont identique par symétrie rotationnelle. Par exemple, le tétraèdre à gauche reçoit une coloration différente du tétraèdre au centre si ses arêtes incolorées sont colorées bleue et rouge avec bleue au sommet en haut. En revanche, avec rouge au sommet en haut le résultat est symétrique au tétraèdre au centre, par une rotation de la face droite de ce dernier par $\tau/3$ sens anti horaire (la rotation illustrée pour le tétraèdre à droite).

Soit Ω l'ensemble des 2^6 colorations. Les orbites d'Ω sous les douze symétries rotationnelles du tétraèdre sont précisement les colorations différentes. Alors déterminons-nous la valeur de fix(g) pour chaque symétrie g. Les résultats sont affichés en dessus : par exemple, une rotation arête-arête g laisserait deux arêtes renversées mais toujours dans le même emplacement, donc quelconque coloration de ces deux arêtes serait fixée par g. Les autres arêtes, par contre, sont échangées par paire. Pour une paire fixée les deux arêtes doivent avoir la même couleur, donc de chaque paire une seule des deux arêtes peut être librement colorieés.

Enfin le nombre d'orbites est le nombre totate de colorations fixées divisé par l'ordre du groupe : $\left(3 \times 2^4 + 1 \times 2^6 + 8 \times 2^2\right)/12 = 12$.

C'est un lemme souvent attribué à William Burnside (1852–1927). Son livre célèbre de 1897 *Theory of Groups of Finite Order* a marqué peut-être sa première apparition en "manuel scolaire" pourtant la formule peut être retracée jusqu'à Cauchy en 1845.

Lien externe : cristal.univ-lille.fr/~jdelahay/pls/ (ajoutez "2006/150.pdf" à l'URL)
À lire : *Éléments de théorie des groupes* par Josette Calais, PUF, 2014.

merci à J.-P. D.