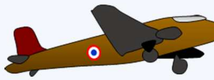
THEOREM OF THE DAY

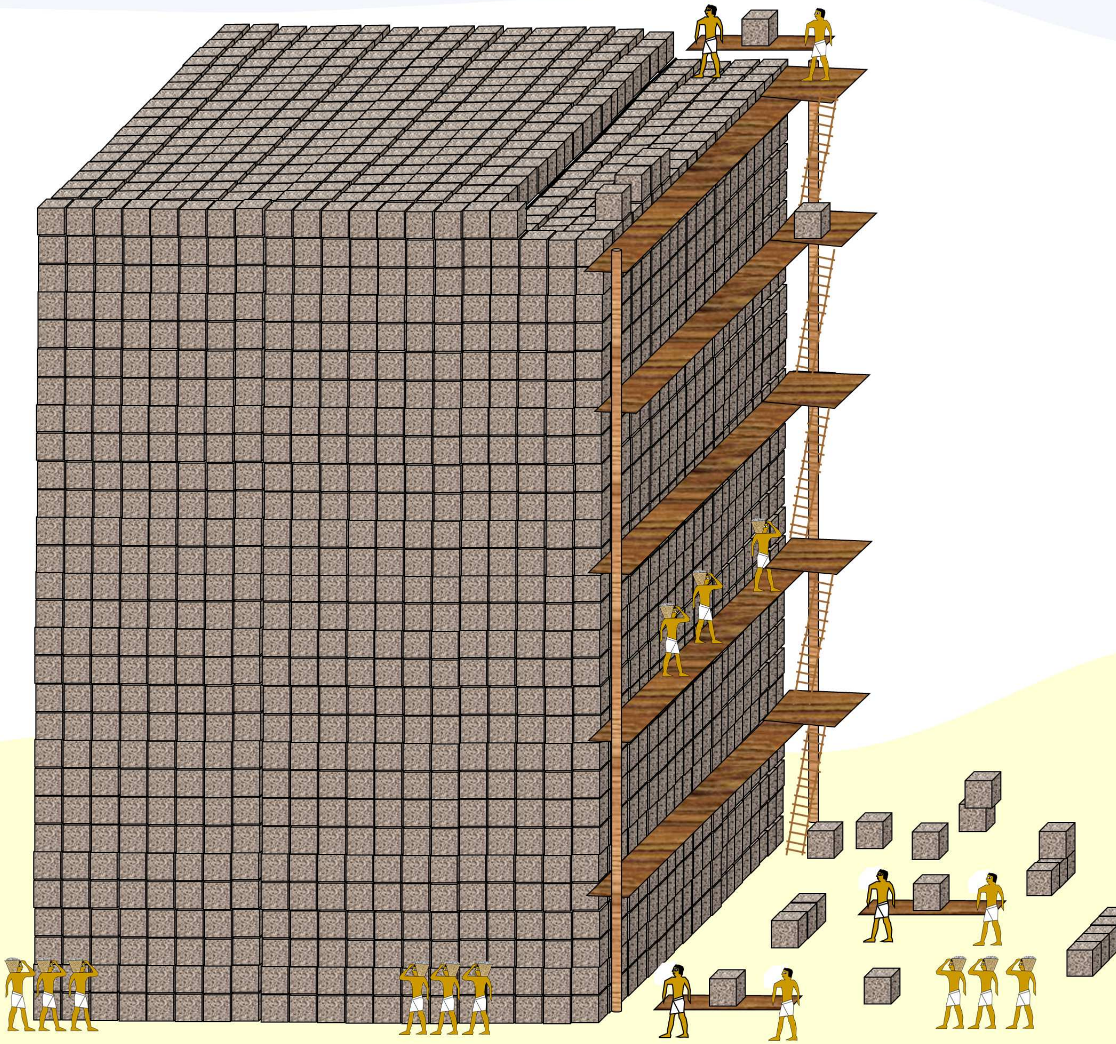
La Formule Pythagoricien d'Euclide *Pour chaque triplet pythagoricien* (a, b, c) *(c'est à dire, entiers naturels vérifiant* $a^2 + b^2 = c^2$*) il y a un unique triplet* (k, m, n) *d'entiers naturels,* $m > n$*, où* m, n *sont premier entre eux et sont de parités différentes, tel que*



$$a = k(m^2 - n^2),\ \ b = 2kmn,\ \ c = k(m^2 + n^2).$$

Le problème du pharaon de Saint-Exupéry

Un pharaon décida d'ériger, en utilisant exclusivement des pierres taillées en cube de 1m de côté, une stèle massive géante en forme de parallélépipède rectangle dont la hauteur fut égale à la diagonale de la base. Il ordonna à un certain nombre de fonctionnaires de rassembler chacun une part égale des matériaux exactement prévus pour l'érection de la stèle. Puis il mourut. Les archéologues ne retrouvèrent qu'un seul de ces dépôts. Ils y dénombrèrent 348 960 150 cubes de pierres. Ils ne surent rien des autres dépôts, sinon que le nombre total des dépôts était, pour des raisons mystiques, un nombre premier. Cette découverte leur permit cependant de calculer rigoureusement les dimensions de la stèle prévue.



L'illustration montre un projet plus modeste, qui propose un parallélépipède dont les dimensions sont $20 \times 21 \times 29$, avec $29^2 = 20^2 + 21^2$, en accord avec l'exigence du pharaon. Supposons que les archéologues ne trouvent qu'un dépôt de $B = 6090$ cubes de pierres appartenant à un des p fonctionnaires, p un nombre premier. Ils peuvent déterminer les dimensions du parallélépipède ainsi : la base est $a \times b$, et la hauteur est c, où (a, b, c) est un triplet pythagoricien. Or, $a \times b \times c = p \times B$, alors l'application de la formule de Euclid nous donne k, m et n tel que $2k^3mn(m^2 - n^2)(n^2 + m^2) = p \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 29$. L'un de m et n est pair donc le côté gauche de cette équation est divisible par 4, ce qui implique que $p = 2$. Nous pouvons donc écrire $k^3mn(m-n)(m+n)(n^2+m^2) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 29$. De plus, les cinq derniers facteurs à gauche sont premiers entre eux : par exemple, si un premier quelconque, disons q, divise m et $m - n$ alors q doit également diviser n, mais la formule affirme que m et n sont premier entre eux. D'où il suit que $k = 1$ et chacun des autres facteurs égale à un choix différent entre $2, 3, 5, 7$ et 29. Evidemment, $m^2 + n^2$ ne peut avoir que la valeur 29, et les valeurs restantes suivent: $m = 5$ and $n = 2$.

La formule d'Euclide figure dans le livre 10 des *Éléments* où elle sert comme Lemma 1 pour la demonstration de Proposition 29. Le paramètre k ne fait pas partie de la formule originale étant ajouté afin de generer les triplets 'imprimitifs', tel que $(9, 12, 15) = 3 \times (3, 4, 5)$.

Lien externe : lescoursdemathsdepjh.monsite-orange.fr/ : voir sous Algèbre Générale.
À lire : *Faire des mathématiques avec l'histoire au lycée,* by Évelyne Barbin, Ellipses, 2019.

merci à G.M.