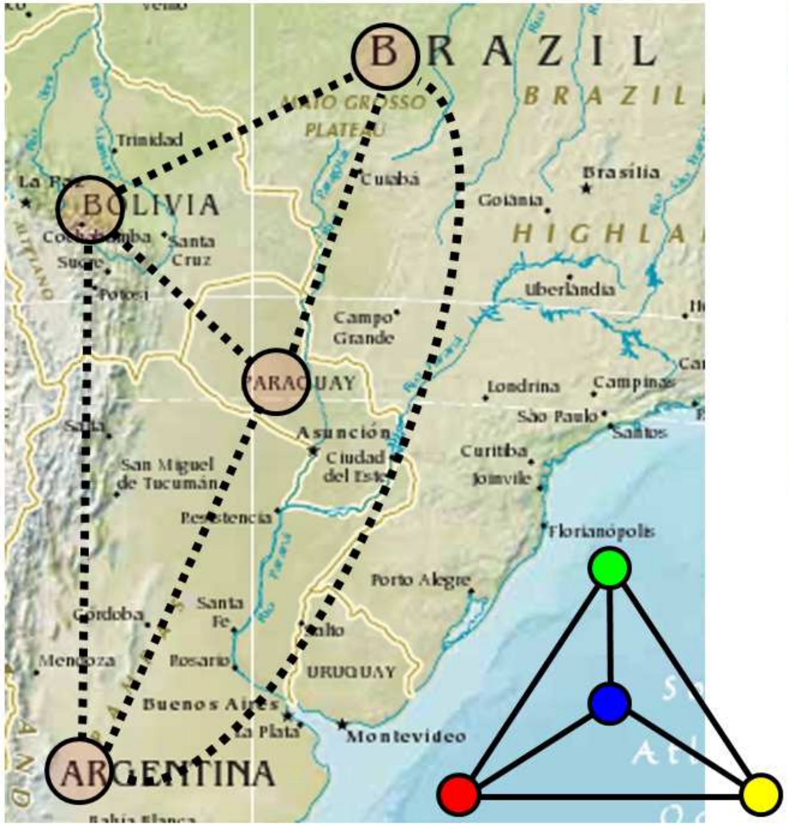
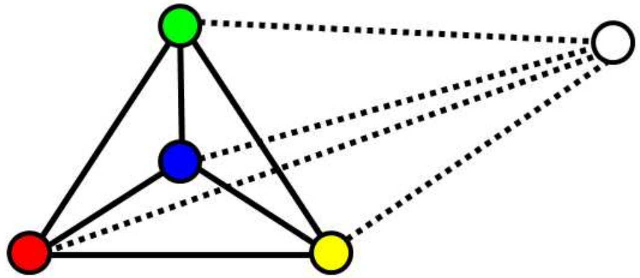
THEOREM OF THE DAY

Le théorème des quatre couleurs *Pour tout graphe planaire, il existe une coloration valide avec quatre couleurs au maximum.*





À la question : est-ce qu'on peut colorier les pays sur une carte en utilisant seulement quatre couleurs de façon à ce que deux pays mitoyens ne reçoivent pas la même couleur ? L'approche classique de la modélisation mathématique est d'ignorer tout aspect non essentiel de la géographie, en représentant les pays par des *sommets* et la relation "mitoyen" par des *arêtes*, construisant ainsi un *graphe*. Une coloration des sommets est dite *valide* si jamais deux sommets de la même couleur ne sont liés par une arête : cela traduit l'exigence de la coloration de la carte. Un graphe est *planaire* s'il peut être dessiné sans intersection des arêtes (sauf aux sommets) et notre modélisation cartographique est doté évidemment de cette propriété. Les cartes sur la droite représentent quatre pays ayant des frontières communes, et cela correspond à un graphe *complet* avec quatre sommets nécessitant quatre couleurs, comme illustré à droite au centre. Un autre pays mitoyen avec tous les quatre pays en même temps nécessiterait une cinquième couleur, mais cela engendrerait un graphe non planaire (dessin tout à droite) : nous sommes tous d'accord pour dire que cette possibilité est exclue de la cartographie normale ! Le défi est de démontrer qu'il ne peut y avoir aucun graphe planaire anormale qui nécessiterait plus de quatre couleurs.

La question ci-dessus était proposée en 1852 par Francis Guthrie, vulgarisée ensuite par Augustus De Morgan. Une démonstration fausse (1879) par Alfred Bray Kempe, peut-être l'erreur la plus connue dans toute l'histoire des maths, contenait néanmoins l'essentiel de la future démonstration faite cent ans après. Celle-ci consiste en l'identification d'un ensemble **inévitable** de configurations dites **réductibles** c'est à dire menant à un graphe plus petit dont une coloration avec quatre couleurs se transfère au graphe original, niant ainsi l'existence du plus petit contre exemple au théorème. La théorie de la réductibilité est due à George David Birkhoff (début des 1900) ; le problème de certifier l'inévitabilité pour (nécessairement) de très grands ensembles de configurations est devenu accessible pour la recherche avec un ordinateur grâce à la "méthode de déchargement" de Heinrich Heesch (1969) et une démonstration a été faite en 1976 par Ken Appel et Wolfgang Haken avec le programmeur informatique John Koch. La contribution informatique, toujours présente même dans une démonstration "2e génération" de Robertson, Sanders, Seymour et Thomas (1996), a suscité la controverse ; le théorème est pourtant universellement accepté comme vrai.

Lien externe : testard.frederic.pagesperso-orange.fr/mathematiques/coursGraphes. Les cartes proviennent de www.lib.utexas.edu/maps/.
À lire : *À la découverte des graphes et des algorithmes de graphes* par Christian Laforest, EDP Sciences, 2017.

merci à E.C., C.L.