Fonctions méromorphes aux zéros et pôles communs
Meromorphic Functions Sharing the Same Zeros and Poles

Günter Frank* Xinhou Hua†
Rémi Vaillancourt‡

CRM-3018

Avril/April 2004

*Technische Universität Berlin, Fachbereich 3 Mathematik, 10623 Berlin, Deutschland; frank@math.tu-berlin.de

†Department of Mathematics and Statistics, University of Ottawa, Ottawa ON, K1N 6N5, Canada; hua@mathstat.uottawa.ca

‡Département de mathématiques et de statistique, Université d'Ottawa, Ottawa ON, K1N 6N5, Canada; remi@uottawa.ca

Résumé

On résout complètement le problème de Hinkkanen (1984) : les zéros et les pôles d'une fonction méromorphe quelconque f d'une variable complexe et les zéros de $f^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, 4$, déterminent f.

Abstract

Hinkkanen's problem (1984) is completely solved, i.e., it is shown that any meromorphic function f of one complex variable is determined by its zeros and poles and the zeros of $f^{(j)}$ for $j = 1, 2, 3, 4$.

Abridged English version

1 Introduction and Main Result

The uniqueness of meromorphic functions is an important research area. Let f and g be two meromorphic functions of one complex variable. For convenience, we say that f and g share the value a CM (counting multiplicities) when $f(z)-a$ and $g(z)-a$ have the same zeros with the same multiplicities; similarly, f and g share the value a IM (ignoring multiplicities) when $f(z)-a$ and $g(z)-a$ have the same zeros without considering their multiplicities. Of course, a CM shared value is an IM shared values, but an IM shared value may not be a CM shared value.

A natural problem is: how many values can determine a meromorphic function?

Theorem 1.1 (Nevanlinna's Five-value Theorem (Nevanlinna 1929)) *If two meromorphic functions share five values IM, then they are equal.*

The number five of IM shared values cannot be reduced.

Example 1 Let $f(z)=\exp(z)$ and $g(z)=\exp(-z)$. Then f and g share four values 0, 1, -1, ∞ IM. But f and g are different.

Theorem 1.2 (Nevanlinna's Four-value Theorem (Nevanlinna 1929)) *If two meromorphic functions, f and g, share four values CM, then f is a Möbius transformation of g.*

This theorem was improved by Gundersen [7] in 1983: Two IM shared values and two CM shared values imply four CM shared values, *i.e.*, if two meromorphic functions, f and g, share two values CM and two other values IM, then f is a Möbius transformation of g.

Remark 1 We simply say "2 CM + 2 IM implies 4 CM". So far it is still not known whether "1 CM + 3 IM implies 4 CM".

Therefore, to determine a meromorphic function, the number of shared values is very important.

A difficult problem is to know whether a meromorphic function is uniquely determined only by its zeros and poles and the zeros of its first few derivatives.

For two entire functions, f and g, with finite order, C. C. Yang [15] and G. G. Gundersen [6] studied the case where $f^{(j)}$ and $g^{(j)}$ share 0 CM for $j=0,1$.

For two meromorphic functions, f and g, one easily verifies that $f^{(j)}$ and $g^{(j)}$ share 0 and ∞ CM for each non-negative integer j whenever f and g belong to one of the following four cases:

1. $f=cg, \quad c\in\mathbb{C}-\{0\}$;
2. $f(z)=e^{az+b}$, $g(z)=e^{cz+d}, \quad a,c\in\mathbb{C}-\{0\}$, $b,d\in\mathbb{C}$;
3. $f(z)=a(1-be^{cz})$, $g(z)=d(e^{-cz}-b), \quad a,b,c,d\in\mathbb{C}-\{0\}$;
4. $f(z)=a(1-be^{\beta(z)})^{-1}$, $g(z)=a(e^{-\beta(z)}-b)^{-1}, \quad a,b\in\mathbb{C}-\{0\}$, β a non-constant entire function.

A. Hinkkanen [1, No. 2.65, p. 492] proposed the following problem:

Question 1.3 (Hinkkanen's Problem) *Does there exist an integer $n\geq 2$ such that f and g must satisfy one of the four cases (i)–(iv) when $f^{(j)}$ and $g^{(j)}$ share the values 0 and ∞ CM for $j=0,1,\ldots,n$?*

In 1989, L. Köhler [11] proved that $n=6$ solves the problem. K. Tohge [14] in 1990 considered the case $n=2,3$ under restrictions on the growth of f and g.

In this Note, we shall provide the sharp answer to Hinkkanen's Problem by proving the following result. A detailed proof is in [8].

Theorem 1.4 *The sharp answer to Hinkkanen's problem is $n=4$. That is, when $f^{(j)}$ and $g^{(j)}$ share the values 0 and ∞ CM for $j=0,1,2,3,4$, then f and g must belong to one of the above four cases (i)–(iv).*

The following example shows that our theorem is best.

Example 2 Let $f(z)=\exp(e^{z})$ and $g(z)=\exp(e^{-z})$. Then f and g do not satisfy (i)–(iv). It is easy to check that $f^{(j)}$ and $g^{(j)}$ share 0 and ∞ CM for $j=0,1,2,3$. However, from equations (1) (see the French version) we see that $f^{(4)}$ and $g^{(4)}$ have no common zeros IM. On the other hand, it is obvious that $f^{(4)}$ and $g^{(4)}$ have infinitely many zeros. Thus $f^{(4)}$ and $g^{(4)}$ do not share zeros IM.

2 Proof Strategy

To prove our result, the following strategy is used:

(a) Classify the zeros of the functions f and g and their derivatives according to their multiplicities.

(b) Establish relations between the characteristic functions of f'/f and either the simple zeros of f and the zeros of f'' with multiplicities less than 109 or the simple zeros of f' and the zeros of f''' with multiplicities less than 109. The same is done for g'/g. The number 109 here can be replaced by any bigger number.

(c) Then restrict attention to the kind of zeros listed in (b). This is done by considering several cases.

(d) Establish linear relations between $H_{j+1} - H_j$ and $H_{j+2} - H_{j+1}$ for $j = 0, 1, 2$, where H_j is defined in equation (2).

(e) Use the extension of the Tumura-Clunie theorem obtained by Hua [10] to deal with the cases 1 and 2 in "La démonstration en bref" (see the French version).

3 Introduction et résultat principal

L'unicité des fonctions méromorphes est un important domaine de recherche. Soit f et g deux fonctions méromorphes d'une variable complexe. On dit que f et g partagent la valeur a CM (comptant la multiplicité) si $f(z)-a$ et $g(z)-a$ admettent les mêmes zéros avec les mêmes multiplicités. De même, f et g partagent la valeur a IM (ignorant la multiplicité) si $f(z) - a$ et $g(z) - a$ admettent les mêmes zéros sans tenir compte de leurs multiplicités. Il s'ensuit qu'une valeur partagée CM est une valeur partagée IM, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Naturellement on pose la question suivante : combien de valeurs déterminent une fonction méromorphe ?

Théorème 3.1 (Le théorème des cinq valeurs de Nevanlinna (Nevanlinna 1929)) *Si deux fonctions méromorphes partagent cinq valeurs IM, alors elles sont identiques.*

On ne peut réduire le nombre cinq de valeurs partagées IM.

Exemple 1 Soit $f(z) = \exp(z)$ *et* $g(z) = \exp(-z)$*. Alors* f *et* g *partagent les quatre valeurs* $0, 1, -1, \infty$ *IM, mais* f *et* g *sont différentes.*

Théorème 3.2 (Le théorème des quatre valeurs de Nevanlinna (Nevanlinna 1929)) *Si deux fonctions méromorphes partagent quatre valeurs CM, alors* f *est une transformation de Möbius de* g*.*

En 1983, Gundersen [7] a amélioré ce théorème : Deux valeurs partagées IM et deux valeurs partagées CM impliquent quatre valeurs partagées CM. Donc, si deux fonctions méromorphes f et g partagent deux valeurs CM et deux autres valeurs IM, alors f est une transformation de Möbius de g.

Remarque 1 On dit simplement : 2 CM + 2 IM implique 4 CM. On ne sait toujours pas si : 1 CM + 3 IM implique 4 CM.

On voit la grande importance du nombre de valeurs partagées pour déterminer une fonction méromorphe.

Un problème difficile : une fonction méromorphe est-elle déterminée uniquement par ses zéros et ses pôles et par les zéros de ses quelques premières dérivées ?

Pour deux fonctions entières, f and g, d'ordre fini, C. C. Yang [15] et G. G. Gundersen [6] ont étudié le cas où $f^{(j)}$ et $g^{(j)}$ partagent 0 CM pour $j = 0, 1$.

Pour deux fonctions méromorphes, f and g, on vérifie facilement que $f^{(j)}$ et $g^{(j)}$ partagent 0 et ∞ CM pour chaque entier $j \geq 0$ si f et g appartiennent à l'un des cas suivants :

1. $f = cg, \quad c \in \mathbb{C} - \{0\}$;
2. $f(z) = e^{az+b}$, $g(z) = e^{cz+d}, \quad a, c \in \mathbb{C} - \{0\}, b, d \in \mathbb{C}$;
3. $f(z) = a(1 - be^{cz})$, $g(z) = d(e^{-cz} - b), \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} - \{0\}$;
4. $f(z) = a(1 - be^{\beta(z)})^{-1}$, $g(z) = a(e^{-\beta(z)} - b)^{-1}, \quad a, b \in \mathbb{C} - \{0\}$, et β une fonction entière non constante.

A. Hinkkanen [1, No. 2.65, p. 492] a proposé le problème suivant :

Question 3.1 (Problème de Hinkkanen) *Existe-t-il un entier $n \geq 2$ tel que f et g doivent satisfaire à l'un des quatre cas (i)–(iv) quand $f^{(j)}$ et $g^{(j)}$ partagent les valeurs 0 et ∞ CM pour $j = 0, 1, \ldots, n$?*

En 1989, L. Köhler [11] démontra que $n = 6$ résout le problème. K. Tohge [14] en 1990 considéra les cas $n = 2$ et $n = 3$ avec des restrictions sur la croissance de f et g.

Dans cette Note, nous obtenons la réponse précise au problème de Hinkkanen par la démonstration du résultat suivant. Pour la démonstration complète, voir [8].

Théorème 3.3 *La réponse précise au problème de Hinkkanen est $n = 4$: si $f^{(j)}$ et $g^{(j)}$ partagent 0 et ∞ CM pour $j = 0, 1, 2, 3, 4$, alors f et g appartiennent à l'un des cas (i)–(iv) ci-haut énumérés.*

L'exemple suivant montre que notre résultat est le meilleur.

Exemple 2 Soit $f(z) = \exp(e^z)$ et $g(z) = \exp(e^{-z})$. Alors f et g ne satisfont par (i)–(iv). On vérifie facilement que $f^{(j)}$ et $g^{(j)}$ partagent 0 et ∞ CM pour $j = 0, 1, 2, 3$. Cependant, des équations :

$$f^{(4)}(z) = (1 + 7e^z + 6e^{2z} + e^{3z}) \exp(z + e^z), \quad g^{(4)}(z) = (1 + 6e^z + 7e^{2z} + e^{3z}) \exp(-4z + e^{-z}), \tag{1}$$

on voit que $f^{(4)}$ et $g^{(4)}$ ne partagent pas 0 IM. D'autre part, on voit que $f^{(4)}$ et $g^{(4)}$ admettent une infinité de zéros. Donc $f^{(4)}$ et $g^{(4)}$ ne partagent pas 0 IM.

4 Stratégie de la démonstration

La démonstration emploie la stratégie suivante :

(a) On classe les zéros des fonctions f et g et de leurs dérivées selon leurs multiplicités.

(b) On établit des relations entre les fonctions caractéristiques de Nevanlinna de f'/f et entre les zéros simples de f et les zéros de f'' de multiplicités inférieures à 109 ou entre les zéros simples de f' et les zéros de f''' de multiplicités inférieures à 109. On fait de même pour g'/g. On peut remplacer le nombre 109 par un nombre quelconque plus grand.

(c) Par la suite, on ne considère, au moyen de plusieurs cas, que les zéros énumérés en (b).

(d) On établit des relations linéaires entre $H_{j+1} - H_j$ et $H_{j+2} - H_{j+1}$ pour $j = 0, 1, 2$, où

$$H_j := H_j(f, g) := \frac{f^{(j+1)}}{f^{(j)}} - \frac{g^{(j+1)}}{g^{(j)}} \quad (j = 0, ..., 4). \tag{2}$$

(e) On emploie l'extension du théorème de Tumura–Clunie obtenue par Hua [10] pour traiter ces relations dans les cas 1 et 2 de la démonstration en bref.

5 La démonstration en bref

La démonstration se base sur la théorie de Nevanlinna. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe en $|z| \leq R < \infty$. On note $N(r, f)$, $m(r, f)$ et $T(r, f)$, respectivement, la fonction de cardinalité, la fonction de proximité et la fonction caractéristique de Nevanlinna. On emploie le symbole $S(r, f)$ dans le sens suivant : $S(r, f) = o\big(T(r, f)\big)$ possiblément à l'extérieur d'un ensemble de valeurs $\{r\}$ de mesure totale finie, c'est-à-dire $\int_{\{r\}} dr < \infty$, si f est d'ordre infini. On note $N_{=i}(r, f)$ le nombre de pôles de f d'ordre i tenant compte de leur multiplicité et $\bar{N}_{=i}(r, f)$ le nombre de pôles distincts.

On divise la démonstration en trois étapes, deux cas et cinq sous-cas.

Étape 1. On montre que $T(r, H_j - H_i) = S\left(r, \dfrac{f'}{f}\right), \quad (0 \leq i < j \leq 4)$.

Étape 2. On considère les cas spéciaux suivants :

– $H_i \equiv 0$ pour certains i tels que $1 \leq i \leq 4$. Alors on démontre que f et g satisfont la relation (iv).

– $H_j - H_{j-1} \equiv 0$ pour certains j tels que $1 \leq j \leq 3$. Au moyen de la solution d'équations différentielles on conclut que f et g satisfont à l'une des relations (i)–(iv).

– $H_1 - 2H_0 \equiv 0$. Dans ce cas, on obtient soit (i) ou soit (iii).

Étape 3. On considère le cas :

$$H_i \not\equiv 0 \ (i = 0, \ldots, 4), \quad H_j - H_{j-1} \not\equiv 0 \ (j = 1, \ldots, 3), \quad H_1 - 2H_0 \not\equiv 0.$$

En premier lieu, on montre que

$$T\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq 5m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + 4m\left(r, \frac{g'}{g}\right) + S\left(r, \frac{f'}{f}\right).$$

Puis, on classe les zéros de f'' et de f''' suivant leurs multiplicités, d'où il vient :

$$T\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq 1962\left[N_{=1}\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \sum_{i=1}^{108} \overline{N}_{=i}\left(r, \frac{1}{f'''}\right)\right] + S\left(r, \frac{f'}{f}\right)$$

et

$$T\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq 36\left[N_{=1}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \sum_{i=1}^{108} \overline{N}_{=i}\left(r, \frac{1}{f''}\right)\right] + S\left(r, \frac{f'}{f}\right).$$

Ensuite, on considère deux cas :

Cas 1. Supposons que $N_{=1}\left(r, \frac{1}{f'}\right) = S\left(r, \frac{f'}{f}\right)$. Si $\sum_{i=1}^{108} \overline{N}_{=i}\left(r, \frac{1}{f'''}\right) = S\left(r, \frac{f'}{f}\right)$, on obtient (ii). Sinon, on considère trois sous-cas :

Sous-cas 1.1. De l'implication :

$$\overline{N}_{=1}\left(r, \frac{1}{f''}\right) + \overline{N}_{=q+1}\left(r, \frac{1}{f''}\right) = S\left(r, \frac{f'}{f}\right) \Rightarrow H_3 - H_2 = q(H_4 - H_3),$$

il résulte que f et g satisfont à l'une des relations (i)–(iv).

Sous-cas 1.2. Si $\overline{N}_{=q+1}\left(r, \frac{1}{f''}\right) \neq S\left(r, \frac{f'}{f}\right)$, alors $H_2 - H_1 = (q+1)(H_3 - H_2)$, et le résultat suit.

Sous-cas 1.3. De l'implication :

$$\overline{N}_{=q+1}\left(r, \frac{1}{f''}\right) = S\left(r, \frac{f'}{f}\right) \Rightarrow H_3 - H_2 = q(H_4 - H_3),$$

il résulte que f et g satisfont à l'une des relations (i)–(iv).

Cas 2. On a l'implication suivante :

$$\overline{N}_{=1}\left(r, \frac{1}{f'}\right) \neq S\left(r, \frac{f'}{f}\right) \Rightarrow H_1 - H_0 = \frac{1}{3}(H_2 - H_1).$$

Si $\sum_{i=1}^{108} \overline{N}_{=i}\left(r, \frac{1}{f''}\right) = S\left(r, \frac{f'}{f}\right)$, alors $\frac{f'}{f}$ est rationnelle et la conclusion s'ensuit. Sinon, il existe un entier q, $1 \leq q \leq 108$, tel que

$$\overline{N}_{=q}\left(r, \frac{1}{f''}\right) \neq S\left(r, \frac{f'}{f}\right).$$

Enfin, une intégration de l'équation donne le résultat dans chacun des deux sous-cas suivants :

Sous-cas 2.1. $\overline{N}_{=q+1}\left(r, \frac{1}{f'}\right) \neq S\left(r, \frac{f'}{f}\right) \Rightarrow H_2 - H_1 = \frac{q}{q+2}(H_3 - H_2)$,

Sous-cas 2.2. $\overline{N}_{=q+1}\left(r, \frac{1}{f'}\right) = S\left(r, \frac{f'}{f}\right) \Rightarrow H_2 - H_1 = q(H_3 - H_2)$,

Les divers lemmes de la démonstration complète utilisent les références suivantes [2], [3], [4], [5], [9], [12], [13].

Remerciements

Nous remercions le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada et le Centre de recherches mathématiques de l'Université de Montréal pour leur soutien.

Références

[1] K. F. Barth, D. A. Brannan and W. K. Hayman, *Research problems in complex analysis*, Bull. London Math. Soc., **16** (1984) 490–517.

[2] C. T. Chuang, *Sur la comparaison de la croissance d'une fonction méromorphe et de celle de sa dérivée*, Bull. Sci. Math., **75** (1951) 171–190.

[3] J. Clunie, *On integral and meromorphic functions*, J. London Math. Soc. **37** (1962) 17–27.

[4] G. Frank & W. Hennekemper, *Einige Ergebnisse über die Werteverteilung meromorpher Funktionen und ihrer Ableitungen*, Resultate Math. **4** (1981) 39–54.

[5] F. Gross, *Factorization of meromorphic functions*, U.S. Government Printing Office, Washington DC, 1972.

[6] G. G. Gundersen, *When two entire functions and also their first derivatives have the same zeros*, Indiana Univ. Math. J., **30** (1981) 293–303.

[7] G. G. Gundersen, *Meromorphic functions that share four values*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983) 545–567. Correction : 304 (1987) 847–850.

[8] G. Frank, X. H. Hua & R. Vaillancourt, *Meromorphic functions sharing the same zeros and poles*, J. Can. Math./Can. J. Math., sous presse.

[9] W. K. Hayman, *Meromorphic functions*, Oxford University Press, 1964.

[10] X. H. Hua, *Some extensions of the Tumura–Clunie theorem*, Complex Variables **16** (1991) 69–77.

[11] L. Köhler, *Meromorphic functions sharing zeros and poles and also some of their derivatives sharing zeros*, Complex Variables, **11** (1989), 39–48.

[12] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter, Berlin, 1993.

[13] R. Nevanlinna, *Analytic functions*, Springer-Verlag, New York, 1970.

[14] K. Tohge, *On a problem of Hinkkanen about Hadamard products*, Kodai Math. J. **13** (1990) 101–120.

[15] C. C. Yang, *On two entire functions which together with their first derivatives have the same zeros*, J. Math. Anal. Appl. **56** (1976) 1–6.